Anabelioid の幾何学

望月 新一 （京都大学数理解析研究所）

２００２年３月

§1. 新技術導入の動機

F を数体とし、E をその上の楕円曲線とする。素数 $l \geq 3$ に対し、簡単のため、Spec(F) 上の、l 等分点による群スキーム $E[l]$ から定まるガロア表現

$$G_F \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to GL_2(\mathbb{F}_l)$$

が全射となることを仮定する。

次に、E が bad, multiplicative reduction を持つ（数体 F の）素点 $\mathfrak{p}_F$ を考える。F を $\mathfrak{p}_F$ で完備化して得られる体を $F_{\mathfrak{p}_F}$ と書くとすると、$F_{\mathfrak{p}_F}$ の上では楕円曲線 $E_{F_{\mathfrak{p}_F}} \stackrel{\text{def}}{=} E \otimes_F F_{\mathfrak{p}_F}$ の 'Tate curve' としての表示 '$\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$' より定まる、canonical な '乗法的な' 部分群スキーム

$$\boldsymbol{\mu}_l \subseteq E[l]|_{F_{\mathfrak{p}_F}}$$

がある。ここで検証する問題は：

> 前述の '局所的な乗法的部分加群' を、'大域的な乗法的部分加群' として F 全体に延長することはできないか？

ということである。

そのような延長を安直なアプローチで作ろうとすると、直ちに本質的な障害にぶち当たる。例えば、$K \stackrel{\text{def}}{=} F(E[l])$ を l 等分点たちの、F 上の最小定義体とし、K まで上がって作業してみるとする。すると、$E[l]|_K$ の部分群スキームとして、'$\boldsymbol{\mu}_l$' を K 全体の上で定義されるもの

$$\mathcal{L}_K \subseteq E[l]|_K$$

に伸ばすことができるが、その $\mathcal{L}_K$ は、

K の殆んどの bad, multiplicative reduction の素点 $\mathfrak{p}_K$ においては、その素点における局所理論から生じる '乗法的な部分群スキーム' と 一致しない。

この問題を克服するためには、 視点を抜本的に変えてみる 必要がある。 結論からいうと、'正しい視点' は次の内容からなっている：

(i) 大域的な乗法的部分群スキームを、元々の作業の場としていた集合論的な '宇宙' において構成することを ひとまず諦め、全く別の、 独立な宇宙 における、元の対象たち E, F, K 等の コピー $E_{\circledcirc}, F_{\circledcirc}, K_{\circledcirc}$ に対する乗法的部分群スキームの構成を目指す。

(ii) 元々の宇宙の K の、$\mathfrak{p}_F$ の上の素点たち $\mathfrak{p}_K$ を、新しい宇宙の $K_{\circledcirc}$ の base-point を parametrize するものと見る。

つまり、一言でいうと、 K の basepoint を動かす ことが、肝心である。動かすことによって、元の宇宙における $\mathcal{L}_K$ と新しい宇宙の $(\mathcal{L}_K)_{\circledcirc}$ の間の、 相対的な位置 が移動することとなり、旨くその対応する移動を設定することによって、

「$\mathfrak{p}_K$ が表している $K_{\circledcirc}$ の basepoint から、 $\mathcal{L}_K$ に対応する $(\mathcal{L}_K)_{\circledcirc}$ を眺めてみると、その $(\mathcal{L}_K)_{\circledcirc}$ は、（$\forall\ \mathfrak{p}_K$ に対して） 常に乗法的 になる。」

という一見（＝古典的な理論の常識からして）不思議ながらも、実は、ある意味では「同義反復的」な状況を実現することができる。

§2. anabelioid と core

以上の議論は哲学的な要素も含んでいるが、これを厳密な数学として処理するためには、新しい技術の導入が必要となる。この場合、中心となる新技術は、 'anabelioid' の理論である。

'anabelioid' とは、§1 の議論を行なう際に用いなければならない 幾何的な対象 のことである。この幾何的対象は、スキームと違い、 topos、即ち 圏 であるため、 anabelioid 全体の '圏' というものは、 2-category になってしまう。連結なときは、 anabelioid は [SGA1] に登場する 'Galois category' という、今では４０年以上の歴史を持つ馴染み深いものと同じである。つまり、連結な anabelioid は、 $^{\exists}$ 副有限群 G に対して

$$\mathcal{B}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{G \text{ の連続な作用付きの有限集合たちがなす圏}\}$$

と同値な圏のことである。

anabelioid 的な視点が [SGA1] 等に代表される古典的なものと最も本質的に異なるところは、 （有限次）エタール被覆 の扱いである。古典的な理論では、個別のエタール被覆や、複数のエタール被覆からなる図式などは、 一つの決まった Galois category に所属するものとして扱われる。この Galois category は、当然、扱っている すべてのエタール被覆の下 にあるスキーム（＝幾何的対象）に付随するものである。一方、 anabelioid の理論では、 anabelioid そのものを、幾何的対象とみなすため、（本来、互いに全く関係のない、連結な anabelioid $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ に対して）

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Z} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{X} & & \mathcal{Y} \end{array}$$

のような図式＝‘correspondence’、つまり、図式の下に、決まった幾何的対象が必ずしも存在しないような設定を扱うことが可能となる。従って、考察の対象としている、すべての上のような図式に対して、

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Z} & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathcal{X} & & \mathcal{Y} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathcal{C} & \end{array}$$

（ただし、すべての矢印は、有限次エタール被覆。下半分の矢印は、図式を回すものとして unique）のような可換図式を発生する（$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ によらない）$\mathcal{C}$ が存在するという状況は、極めて特殊である。anabelioid の理論では、このような $\mathcal{C}$ のことを、core と呼ぶ。core となる anabelioid の重要な性質として、

「core には、basepoint が、事実上一つしかない」

のである。従って、§1 の議論のように、動く basepoint を扱いたいとき、「basepoint が動き得ない」core との差を「測定する」ことによって、動く方の basepoint を常に正確かつ厳密に管理（監視？）することができる。つまり、core は、「basepoint の変動」という現象に対する案内係の役割を果たすのである。

§3. 数論的な anabelioid の例

§2 の一般論を適用するためには、（§1 に出てくるような）実際に興味を持っている数論的な設定において、「案内役の core」となるものを特定する必要がある。実は、core 性の条件を、（[SGA1] 等に登場する）代数的基本群を使って具体的に書き下してみると、その条件は、

遠アーベル (anabelian）性

つまり、いわゆる（代数的曲線に関する）「Grothendieck 予想」（[Mzk4], Introduction を参照）が成立することに対応していることが分かる。従って、「core を探す」ということは、「Grothendieck 予想のような定理が知られているものを探す」ことを意味するのである。

Grothendieck 予想型の定理が知られている、恐らく最も基本的な場合は、数体、即ち、有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大の場合である。この場合、$\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ の有限次エタール被覆の圏

$$\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathbb{Q})$$

という anabelioid は、代数的整数論の「Neukirch-Uchida」の定理（[NSW], Chapter XII, §2 を参照）より、 core になる。従って、任意の数体 F に対して、 $\mathbb{Q}$ との差を測ることによって、それに付随する anabelioid の basepoint の一意性の状況が分かる。具体的には、数体 F の場合、ちょうど $[F : \mathbb{Q}]$ 個の、本質的に相異なる basepoint が存在するのである。

数体上の双曲的代数曲線 に対しても、 Grothendieck 予想型の定理は得られている（[Tama], [Mzk4] ）ので、十分に一般的なそういう曲線（＝よくよく珍しい例外的なものを除けばすべてのそういう曲線 — [Mzk2] を参照）も core となる。§1 の議論との対応で言えば、その議論に出てくる楕円曲線から原点を抜いて得られる双曲的曲線は、（± 1 の作用を無視すれば）有限個の例外を除いてこのようなものになるので、付随する anabelioid は core になる。

一方、 p 進局所体 （＝ $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）の場合、状況はだいぶ違うのである。まず、「Neukirch-Uchida」の定理の安直な類似物は実は正しくないことが知られているが、局所体のガロア群に 適当な付加構造 を入れれば、「Neukirch-Uchida」の定理と同様な形の定理が成り立つことは知られている（[Mzk5] ）。

最後に、 p 進局所体上の双曲的代数曲線 の場合だが、状況はまた一段と複雑になる。基礎体の局所体の上で、 相対的 な設定で作業するようにすると、（やや強い形の） Grothendieck 予想型の定理は知られている（[Mzk4] ）が、数体の場合と違い、 絶対的 な設定では、そのような定理は得られていない。むしろ、哲学的なレベルで考えると、局所体上の双曲的代数曲線に付随する anabelioid を絶対的な設定で扱うということは、（よく知られている） $\mathbb{Q}_p$ と $\mathbb{F}_p((t))$ （ただし、 t は不定元）の類似で言えば、 $\mathbb{F}_p((t))$ 上の双曲的曲線を、 変数の t が、

$$t \mapsto \sum_{n \geq 1} a_n \cdot t^n$$

（ただし、 $a_n \in \mathbb{F}_p$, $a_1 \neq 0$）というふうに 勝手に動く ような状況の下で扱うことに対応していると思われる。このように考えると、局所体上の場合、絶対的な Grothendieck 予想型の定理が成り立つような場合は、 問題の曲線が、 $\mathbb{F}_p$ のような、絶対的定数体の上で定義されている 場合と予測される。実際、現時点において、局所体上の絶対的な Grothendieck 予想型の定理の成立が知られている中で、（圧倒的な差で）最も例の多い場合は、問題の曲線が、（[Mzk1] に登場するような） canonical な持ち上げ となる場合である。

文献

[Mzk1] S. Mochizuki, *A Theory of Ordinary p-adic Curves*, Publ. of RIMS **32** (1996), pp. 957-1151.

[Mzk2] S. Mochizuki, Correspondences on Hyperbolic Curves, *Journ. Pure Appl. Algebra* **131** (1998), pp. 227-244.

[Mzk3] S. Mochizuki, *The Profinite Grothendieck Conjecture for Closed Hyperbolic Curves over Number Fields*, *J. Math. Sci., Univ. Tokyo* **3** (1996), pp. 571-627.

[Mzk4] S. Mochizuki, *The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves*, *Inv. Math.* **138** (1999), pp. 319-423.

[Mzk5] S. Mochizuki, A Version of the Grothendieck Conjecture for p-adic Local Fields, *The International Journal of Math.* **8** (1997), pp. 499-506.

[Mzk6] S. Mochizuki, *Global Anabelian Geometry in the Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves*, manuscript in preparation.

[Mzk7] S. Mochizuki, *Crystalline Anabelian Geometry in the Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves*, manuscript in preparation.

[NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **323**, Springer-Verlag (2000).

[SGA1] *Revêtement étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois Marie 1960-1961 (SGA1), dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de M. Raynaud, *Lecture Notes in Mathematics* **224**, Springer-Verlag (1971).

[Tama] A. Tamagawa, *The Grothendieck Conjecture for Affine Curves*, *Compositio Math.* **109**, No. 2 (1997), pp. 135-194.